



TITLE:

# つららの波模様の形成機構 (波動の非線形現象とその応用)

AUTHOR(S):

上之, 和人

---

CITATION:

上之, 和人. つららの波模様の形成機構 (波動の非線形現象とその応用).  
数理解析研究所講究録 2004, 1368: 17-24

ISSUE DATE:

2004-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/25402>

RIGHT:

## つららの波模様の形成機構

九州大学応用力学研究所 上之 和人 (Kazuto Ueno)

Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University

### 1 はじめに

自然界のパターン形成において、水や風のシア流れによって引き起こされた砂の波紋はよく知られた現象である [1]. 図 1 または [2] の Fig. 9A に示すように、つららの表面上にも似たような凹凸パターンが見られる. この凹凸模様は、つららの周囲をリング状に取り囲むように発達し、その波模様の平均波長は約 1cm であることが知られている.  $0^{\circ}\text{C}$  以下の低温室に、図 2 (a) に示すような装置を設定し、幅  $l$  cm、角度  $\theta$  の傾斜面の上から、 $0^{\circ}\text{C}$  の水のある適当な流量  $Q$  ml/h で連続的に供給する. その結果、斜面上にできる薄膜状の過冷却水からの氷の成長過程でも、自然界のつららの表面と同じような波模様を観察することができる. 設置角度  $\theta$  を変化させて波模様の波長を計測した結果、平均波長  $\lambda_{\text{mean}}$  と  $\sin \theta$  に、 $0.83/(\sin \theta)^{0.6 \sim 0.9}$  cm の関係があることがわかっている [3]. 実際に、 $\theta = \pi/2$  のときの平均波長は、天然のつららの凹凸の平均波長 1cm にほぼ近い. また、図 1 または [2] の Fig. 9B は、水膜に溶解していた空気が凍結の際気泡となって氷に捕りこまれた跡を示していて、つらら内部の気泡は帯状の群をなしており、各々の気泡群は、つららの太さの増加とともに上方に移動しているのがわかる. つらら表面で、それらの気泡群は波模様の凸部上方に一致していることに注意する.

最近、小川-古川はこの波模様の形成機構についてのモデルを提唱し、波模様の波長と固液界面の移動速度の大きさと向きを与えたが [4], 上で述べた実験や観察結果を説明できなかった. 著者は、線形安定性解析を用いて彼らの定式化を改良し、固液界面の安定性と移動の新しい物理的メカニズムを提唱した [5, 6]. 本稿ではそれらを簡潔にまとめて紹介する.

### 2 理論と結果

図 2 (a) に示す斜面上を流れ落ちる過冷却水から成長する氷を考える. 図 2 (b) に示すように、以下の解析は垂直平面  $(x, y)$  の 2 次元に限定し、簡単のため、結晶の領域は半無限遠に広がっていると仮定する.  $x$  軸は傾斜面の方向に平行であり、 $y$  軸はそれに垂直である. 平均の成長速度  $\bar{V}$  で固液界面とともに動く座標系では、 $y = 0$  が平坦な固液界面の位置であり、 $y = h_0$  は平坦な気液界面の位置である. ここで、 $h_0$  は平均の液膜の厚さである.

放物型のシア流れ  $\bar{U}(y) = u_0\{2(y/h_0) - (y/h_0)^2\}$  は  $x$  軸に平行であり、その片側は自由表面で  $0^{\circ}\text{C}$  以下の冷たい空気に接している. ここで、 $u_0 = gh_0^2 \sin \theta / (2\nu)$  は自由表面での速度である.  $h_0$  は  $Q, \theta, l$  に関して  $h_0 = [3\nu Q / (lg \sin \theta)]^{1/3}$  と表せる [7]. ここで、 $g$  は重力加速度、 $\nu$  は動粘性係数である. 実験では、 $h_0$  と  $u_0$  の値は、 $Q, \theta, l$  を変化させることによって簡単に制御することができる.  $Q = 160$  ml/h,  $l = 3$  cm [3],  $\nu = 1.8 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $\theta = \pi/2$  とおくと、 $h_0$  は約  $93 \mu\text{m}$ ,  $u_0$  は  $2.4 \text{ cm/s}$  程度となる. またこのとき、レイノルズ数  $\text{Re} = u_0 h_0 / \nu$  の値は  $O(1)$  なので、斜面上の流

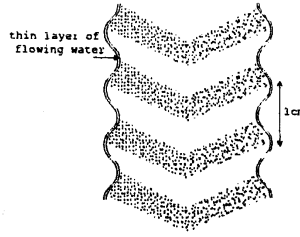


図 1: つららの垂直断面図. 上から水がつららの表面を流れ落ちて薄い水膜を作る. 凹凸の平均間隔は約 1cm である. 氷の中には細かい気泡が凸部上方から捕りこまれている [2].

れは層流である.

## 2.1 支配方程式

$\bar{V}$  で固液界面とともに動く座標系での, 液体, 結晶, 空気内の温度  $T_l$ ,  $T_s$ ,  $T_a$  の方程式はそれぞれ

$$\frac{\partial T_l}{\partial t} + u \frac{\partial T_l}{\partial x} + v \frac{\partial T_l}{\partial y} = \kappa_l \left( \frac{\partial^2 T_l}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_l}{\partial y^2} \right), \quad (1)$$

$$\frac{\partial T_s}{\partial t} - \bar{V} \frac{\partial T_s}{\partial y} = \kappa_s \left( \frac{\partial^2 T_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_s}{\partial y^2} \right), \quad (2)$$

$$\frac{\partial T_a}{\partial t} - \bar{V} \frac{\partial T_a}{\partial y} = \kappa_a \left( \frac{\partial^2 T_a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_a}{\partial y^2} \right) \quad (3)$$

で与えられる. ここで,  $t$  は時間,  $u, v$  は  $\bar{V}$  で動く座標系から測定した  $x, y$  方向の速度である.  $\kappa_l, \kappa_s, \kappa_a$  は, それぞれ液体, 結晶, 空気の熱拡散係数である. つららの太さの成長速度の測定によると, 風速の増加によって液膜を通じての空気中への潜熱の開放が促進され,  $\bar{V}$  の値は増加することが知られている [2]. しかし,  $\bar{V}$  の変化は固液界面の揺らぎの成長率の大きさに影響を与えるが, 波模様の波長は変化しないことを後で見る. それ故に, 我々の興味が波模様の特徴的な波長を求めることに限る, 空気中に流れはないものと仮定する.

$u$  と  $v$  に対する Navier-Stokes 方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_l} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + g \sin \theta, \quad (4)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_l} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - g \cos \theta \quad (5)$$

であり, 連続の式は

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (6)$$

である. ここで  $p$  は圧力,  $\rho_l$  は液体の密度である.

## 2.2 摂動

$T_l, T_s, T_a, u, v$  をそれぞれ定常な非摂動部分と摂動部分に次のように分離する:  $T_l = \bar{T}_l + T'_l$ ,  $T_s = \bar{T}_s + T'_s$ ,  $T_a = \bar{T}_a + T'_a$ ,  $u = \bar{U} + u'$ ,  $v = -\rho \bar{V} + v'$ . ここで,  $\rho = \rho_s / \rho_l$ ,  $\rho_s$  は結晶の密度である.  $v$  の第一項は液体と結晶の密度差によって引き起こされた流れを表す.

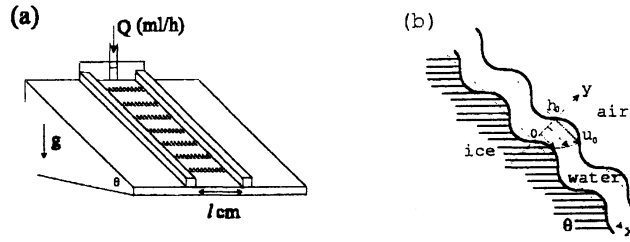


図 2: (a) 過冷却水からの氷の成長過程. 一様間隔の影の部分には氷の周期的な波模様を表す [3]. (b) 角度  $\theta$  の斜面の垂直平面  $(x, y)$ .

[2] の Fig. 9A に示すように, つららの凹凸模様は, つららの周囲をリング状に取り囲んでいる. つまり, つららの表面上の凹凸は主流方向に形成され, それに垂直な周方向には特徴的なパターンは見られない. よって,  $x$  方向の一次元的な固液界面の揺らぎ

$$\zeta(t, x) = \zeta_k \exp[\sigma t + ikx] \quad (7)$$

のみを考えるだけで十分である. ここで,  $k$  は波数,  $\sigma = \sigma_r + i\sigma_i$ ,  $\sigma_r$  は成長率,  $v_p \equiv -\sigma_i/k$  は位相速度,  $\zeta_k$  は界面の微小振幅である. これに対応する気液界面, 液体, 結晶, 空気中の温度, 流れ関数の揺らぎは以下のように表されると仮定する.

$$\xi(t, x) = h_0 + \xi_k \exp[\sigma t + ikx], \quad (8)$$

$$T_l' = g_l(y) \exp\left(-\frac{\rho \bar{V}}{2\kappa_l} y\right) \exp[\sigma t + ikx], \quad (9)$$

$$T_s' = g_s(y) \exp\left(-\frac{\bar{V}}{2\kappa_s} y\right) \exp[\sigma t + ikx], \quad (10)$$

$$T_a' = g_a(y) \exp\left[-\frac{\bar{V}}{2\kappa_a}(y - h_0)\right] \exp[\sigma t + ikx], \quad (11)$$

$$\psi' = f(y)\zeta_k \exp[\sigma t + ikx]. \quad (12)$$

ここで,  $\xi_k$ ,  $g_l$ ,  $g_s$ ,  $g_a$ ,  $f$  はそれぞれの揺らぎの振幅である. (6) 式から,  $u' = u_0 \partial \psi' / \partial y$ ,  $v' = -u_0 \partial \psi' / \partial x$  と表すことができる.

## 2.3 境界条件

### 2.3.1 熱力学的境界条件

固液界面での温度の連続性は

$$T_l|_{y=\zeta} = T_s|_{y=\zeta} = T_m + \Delta T. \quad (13)$$

$\Delta T$  は  $\zeta_k$  のオーダーであると仮定する. Gibbs-Thomson 効果 [8] による凝固点降下  $\Delta T$  は平衡熱力学的な考察のみから決められたが, (13) 式の  $\Delta T$  は, 熱と流体の相互作用の結果決まることを後で見る. 固液界面での熱保存則は,

$$L \left( \bar{V} + \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right) = K_s \frac{\partial T_s}{\partial y} \Big|_{y=\zeta} - K_l \frac{\partial T_l}{\partial y} \Big|_{y=\zeta}. \quad (14)$$

ここで,  $L$  は単位体積当たりの潜熱であり,  $K_s, K_l$  はそれぞれ結晶, 液体の熱伝導度である.  
一方, 気液界面での温度の連続性は

$$T_l|_{y=\xi} = T_a|_{y=\xi} = T_{la}. \quad (15)$$

ここで,  $T_{la}$  は気液界面での温度であり, 次の気液界面での熱保存則

$$-K_l \frac{\partial T_l}{\partial y} \Big|_{y=\xi} = -K_a \frac{\partial T_a}{\partial y} \Big|_{y=\xi} \quad (16)$$

から決まる. ここで,  $K_a$  は空気の熱伝導度である.

### 2.3.2 流体力学的境界条件

固液界面上で両速度は次の条件を満たさなければならない.

$$(\bar{U} + u')|_{y=\zeta} = 0, \quad (17)$$

$$v'|_{y=\zeta} = 0. \quad (18)$$

ここでは密度差による流れの項は非常に小さいので無視した. 気液界面上での運動学的条件は

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \bar{U}|_{y=\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = v|_{y=\xi}. \quad (19)$$

気液界面上でシアーストレスはゼロにならなければならないので,

$$\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=\xi} + \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{y=\xi} = 0. \quad (20)$$

気液界面上でのノーマルストレスの連続性より,

$$-p|_{y=\xi} + 2\rho_l \nu \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{y=\xi} - \gamma \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -P_0. \quad (21)$$

ここで,  $\gamma$  は気液界面の表面張力,  $P_0$  は大気圧である.

## 2.4 流れ関数の摂動部分の振幅に対する方程式と解

摂動の振幅の一次のみを考える. 無次元波数  $\mu = kh_0$  を導入し, 長波長近似  $\mu \ll 1$  を使う.  $u', v'$  を (4), (5) 式の摂動部分に代入し, 圧力項を消去すると,  $\sigma/(ku_0) \ll 1$  の条件のもとで,  $\mu$  の一次のオーダーまでの Orr-Sommerfeld 方程式は,

$$\frac{d^4 f}{dy_*^4} = i\mu \text{Re} \left\{ (2y_* - y_*^2) \frac{d^2 f}{dy_*^2} + 2f \right\} \quad (22)$$

となる. ここで,  $y_* = y/h_0$  である. 流体力学的境界条件 (17)-(21) 式を線形化したものを用いると, (22) 式の解は,

$$\begin{aligned} f(y_*) = & -2y_* + \frac{3(2-i\alpha)}{6-i\alpha} y_*^2 + \frac{i\alpha}{6-i\alpha} y_*^3 + \mu \text{Re} \alpha \left\{ \frac{-96-8i\alpha}{105(6-i\alpha)^2} y_*^2 + \frac{4i\alpha}{35(6-i\alpha)^2} y_*^3 \right. \\ & \left. + \frac{1}{15(6-i\alpha)} y_*^5 - \frac{1}{30(6-i\alpha)} y_*^6 + \frac{1}{210(6-i\alpha)} y_*^7 \right\} \end{aligned} \quad (23)$$

となる。ここで、

$$\alpha = \frac{\mu \text{Re} \cos \theta}{F^2} + \mu^3 \text{Re} S = 2 \cot \theta h_0 k + a^2 h_0 k^3 \quad (24)$$

は重力と表面張力による復元力を表している [7].  $F = u_0 / (gh_0)^{1/2}$  はフルード数,  $S = \gamma / (\rho_l h_0 u_0^2)$  は表面張力を無次元化したものである.  $a = \sqrt{2\gamma / (\rho_l g \sin \theta)}$  は気液界面の表面張力  $\gamma$  に関係した毛管長であり [7], 水の場合で約 3.9 mm である. (19) 式から, 気液界面の振幅  $\xi_k$  と固液界面の振幅  $\zeta_k$  の関係が得られる:

$$\xi_k = -f|_{y_*=1} \zeta_k = \left\{ \frac{6}{6 - i\alpha} + \frac{24\mu \text{Re}\alpha}{35(6 - i\alpha)^2} \right\} \zeta_k. \quad (25)$$

これは, 気液界面の振幅と位相が, 復元力  $\alpha$  の大きさに依存して変化することを示している. 一方, 小川-古川モデルでは,  $\alpha$  の効果を見捨てているので常に  $\xi_k = \zeta_k$  となり, 両界面は波数に関係なく同振幅と同位相で揺らぐことになる.

## 2.5 液体内の温度の摂動部分の振幅に対する方程式と解

$T_l'$  と  $v'$  の仮定した形を (1) 式の摂動部分に代入し, 準定常近似  $\sigma / (\kappa_l k^2) \ll 1$  を使い,  $k\kappa_l / \bar{V} \gg 1$  を満たす波数領域に限定すると,  $g_l$  に対する方程式は,

$$\frac{d^2 g_l}{dz^2} - i\mu \text{Pe}(1 - z^2)g_l = i\mu \text{Pe} f(z) \bar{G}_l \zeta_k \quad (26)$$

となる. ここで  $z = 1 - y_*$ ,  $\text{Pe} = u_0 h_0 / \kappa_l = 3Q / (2l\kappa_l)$  は表面流速に関係したペクレ数であり,  $\bar{G}_l = (T_m - T_{la}) / h_0$  は液体内の温度勾配である.

境界条件 (15), (16) 式より, (26) 式の解は,

$$\begin{aligned} g_l(z) &= \left[ -f|_{z=0} (\phi_1(z) + \mu\phi_2(z)) + i\mu \text{Pe} \int_0^z \{ \phi_2(z)\phi_1(z') - \phi_1(z)\phi_2(z') \} f(z') dz' \right] \bar{G}_l \zeta_k \\ &\equiv H_l(z) \bar{G}_l \zeta_k \end{aligned} \quad (27)$$

となる. ここで,

$$\phi_1(z) = \exp \left( -\frac{1}{2} (-i\mu \text{Pe})^{1/2} z^2 \right) {}_1F_1 \left( \frac{1}{4} \left\{ 1 + \frac{i\mu \text{Pe}}{(-i\mu \text{Pe})^{1/2}} \right\}, \frac{1}{2}, (-i\mu \text{Pe})^{1/2} z^2 \right), \quad (28)$$

$$\phi_2(z) = z \exp \left( -\frac{1}{2} (-i\mu \text{Pe})^{1/2} z^2 \right) {}_1F_1 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \left\{ 1 + \frac{i\mu \text{Pe}}{(-i\mu \text{Pe})^{1/2}} \right\}, \frac{3}{2}, (-i\mu \text{Pe})^{1/2} z^2 \right) \quad (29)$$

であり,  ${}_1F_1$  は合流超幾何関数である.

## 2.6 分散関係式

準定常近似  $\sigma / (\kappa_s k^2) \ll 1$  のもとで, (2) 式の摂動部分の解は,

$$g_s(y) = T_{ks} \exp(ky). \quad (30)$$

$T_{ks}$  は微小振幅である. 境界条件 (13) 式の摂動部分より,

$$-\bar{G}_l \zeta_k + g_l|_{y=0} = T_{ks} = \Delta T \quad (31)$$

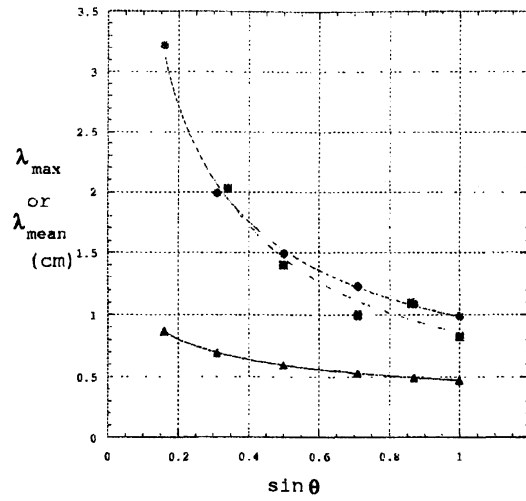


図 3:  $Q = 160 \text{ ml/h}$  のとき,  $\lambda_{\max}$  あるいは  $\lambda_{\text{mean}}$  の  $\sin \theta$  依存性. ■: 実験 [3], ▲: 小川-古川モデル [4], ●: 著者のモデル [5].

を得る. 液体内の温度揺らぎの解  $g_l$  が決まったあとに,  $\Delta T$  が決まる. また, 条件  $k\kappa_l/\bar{V} \gg 1$ ,  $k\kappa_s/\bar{V} \gg 1$  を満たす波数領域に限定し, (27), (30), (31) 式を考慮すると, 境界条件 (14) 式の摂動部分より分散関係式は,

$$\sigma = \frac{\bar{V}}{h_0} \left\{ \frac{dH_l}{dz} \Big|_{z=1} + n\mu (H_l|_{z=1} - 1) \right\} \quad (32)$$

となる. ここで  $n = K_s/K_l$ .

(32) 式の実部, 虚部から, 成長率, 位相速度はそれぞれ,

$$\sigma_r = \frac{\bar{V}}{h_0} \left[ \frac{-\frac{3}{2}\alpha(\mu\text{Pe}) + \mu \{36 - \frac{3}{2}\alpha(\mu\text{Pe})\}}{36 + \alpha^2} + n\mu \frac{-\frac{7}{10}\alpha(\mu\text{Pe}) - \alpha^2 + \mu \{36 - \frac{7}{10}\alpha(\mu\text{Pe})\}}{36 + \alpha^2} \right], \quad (33)$$

$$v_p = -\frac{\bar{V}}{\mu} \left[ \frac{-\frac{1}{4}\alpha^2(\mu\text{Pe}) + \mu \{6\alpha + 9(\mu\text{Pe})\}}{36 + \alpha^2} + n\mu \frac{6\alpha - \frac{7}{60}\alpha^2(\mu\text{Pe}) + \mu \{6\alpha + \frac{21}{5}(\mu\text{Pe})\}}{36 + \alpha^2} \right] \quad (34)$$

となる. 一方, 小川-古川モデルの結果は

$$\sigma_r = \bar{V}k \frac{1 - \frac{239}{10080}(\mu\text{Pe})^2}{\left\{1 - \frac{239}{10080}(\mu\text{Pe})^2\right\}^2 + \left\{\frac{5}{12}\mu\text{Pe}\right\}^2}, \quad (35)$$

$$v_p = \bar{V} \frac{\frac{5}{12}\mu\text{Pe}}{\left\{1 - \frac{239}{10080}(\mu\text{Pe})^2\right\}^2 + \left\{\frac{5}{12}\mu\text{Pe}\right\}^2} \quad (36)$$

である [4]. これらの分散関係の決定的な違いは, (33), (34) 式は復元力  $\alpha$  を含んでいるが, (35), (36) 式は含んでいないということである.  $\sigma_r$  の違いによって, 最大成長率を与える波長  $\lambda_{\max}$  が異なった  $\theta$  依存性を与える. 図 3 が示すように, (33) 式の結果は, (35) 式の結果に比べるとより実験結果に合っている. (33) 式から明らかなように,  $\bar{V}$  の値は外界の空気の温度や風の影響で変化するが,  $\lambda_{\max}$  の値はそれに依存しないことに注意する.  $v_p$  の符号の違いによって, 固液界面の揺らぎの移動方向が異なる. (34) 式の結果は,  $\sigma_r$  の最大成長率を与える波数で, 約  $0.6\bar{V}$  で上方へ移動する.

実際にこの結果は、図1の氷に捕りこまれた気泡群の移動の方向とも合致する。一方、(36)式の結果は、約  $0.5\bar{V}$  で下方に移動することを予測していたが、これを支持する実験的な証拠は知られていない。

### 3 安定性のメカニズム

図4の下の太い実線が示すように、 $\zeta_k/h_0 = 0.1$ の固液界面の微小な揺らぎ  $\Im[\zeta/h_0]$  を考える。それに対応する気液界面の揺らぎは  $\Im[\xi/h_0]$  で上の太い実線で表されている。このとき、両界面の振幅の関係 (25) 式を使う。また、固液界面上での液体中への熱流の揺らぎ  $q_l \equiv \Im \left[ -K_l (\partial T'_l / \partial y) \Big|_{y=\zeta} \right]$  と固体中への熱流の揺らぎ  $q_s \equiv \Im \left[ -K_s (\partial T'_s / \partial y) \Big|_{y=\zeta} \right]$ 、気液界面上での空気中への熱流の揺らぎ  $q_a \equiv \Im \left[ -K_a (\partial T'_a / \partial y) \Big|_{y=\xi} \right]$  を考える。図4の下の方の点線は  $q_l - q_s$  を、上の点線は  $q_a$  を表していて、それぞれの界面と熱流分布の位相の違いを見るために、便宜上それらを0.1倍に縮小して重ねて書いている。(14)式の振動部分の虚部から  $\Im[\sigma \exp(\sigma t + ikx)] = |\sigma| \exp(\sigma_r t) \sin[k(x - v_p t) - \phi] = q_l - q_s$  を得る。ここで、 $|\sigma| = \sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_i^2}$ 、 $\sigma_r = |\sigma| \cos \phi$ 、 $\sigma_i = -|\sigma| \sin \phi$  で、 $\phi$  は固液界面  $\Im[\zeta/h_0]$  と熱流分布  $q_l - q_s$  の位相差を表す。図4(a)-(c)は  $\phi < 0$  であることを示している。 $v_p = -\sigma_i/k$  であることに注意すると、 $\phi < 0$  のとき  $\sigma_i > 0$  となり、 $v_p < 0$  となる。一方、 $\sigma_r$  の符号は  $\phi$  の大きさに変化する。

図4(a)は、(33)式の  $\sigma_r > 0$  となる不安定領域内の波数での分布を示している。熱流  $q_a$  は、気液界面の凸部で大きいことを示している。そこでは、温度勾配が増大し空気中への熱拡散が大きい。ところが、この波数領域では、復元力の大きさを表す  $\alpha$  の値は小さいので、気液界面は固液界面とほぼ同じ振幅で変動し、 $\Im[\xi/h_0]$  と  $\Im[\zeta/h_0]$  の位相のずれは無視できる。よって、固液界面の凸部で冷却が速く、凝固を促進するかのように見える。この形態不安定性の描像は Mullins-Sekerka 理論 [8] と同じである。しかし、熱流  $q_l - q_s$  の最大値は固液界面に対して  $\phi$  だけ上方にシフトしているので、界面の凸部で温度勾配が大きいとは限らないことを示している。このことは、固液界面の凸部のちょうど上方域で成長が他より速いことを示している。一方、凸部の下方域では  $q_l - q_s$  が小さいので融解しようとする。 $-\pi/2 < \phi < 0$  の範囲では、固液界面は不安定になるだけでなく上方へ移動しようとする。これは (34) 式で予測された位相速度の向きとも合致するし、図1に示すように、流れ落ちる水の中に溶解していた空気が固液界面の凸部のちょうど上方域で氷の中へ捕りこまれ、結晶が成長する過程でそれら気泡群が上方へ移動するという観察結果とも合致する。これらのメカニズムは、拡散による不安定機構である Mullins-Sekerka 不安定 [8] やラプラス不安定 [4] だけでは説明できない。図4(b)は、(33)式の  $\sigma_r = 0$  となる中立安定点の波数での分布を示している。このとき  $\Im[\zeta/h_0]$  に対する  $q_l - q_s$  の位相のずれは  $\phi = -\pi/2$  となる。図4(c)は、(33)式の  $\sigma_r < 0$  となる安定領域内の波数での分布を示している。この波数領域では  $\alpha$  の値が大きいので、 $\Im[\xi/h_0]$  と  $q_a$  が上方へ若干シフトしているのがわかる。また  $\Im[\zeta/h_0]$  と  $q_l - q_s$  の位相のずれは  $-\pi < \phi < -\pi/2$  となる。このような配置になると、固液界面の凸部では  $q_l - q_s$  が小さいので融解しようとし、凹部では  $q_l - q_s$  が大きいので成長しようとするので、やがて固液界面の凹凸はなくなって平坦になっていくことを示している。この長波長領域における安定性のメカニズムは、Gibbs-Thomson 効果とは全く違う。

Mullins-Sekerka 不安定では、界面を不安定にするのは拡散であり、界面の凸部のところで熱流が一番大きかったが、液体内に流れが存在すると液体内の温度揺らぎの場は流れの影響を受ける。今の場合、この流れ場は気液界面に作用する復元力の大きさに依存して変化する。この結果は、固液



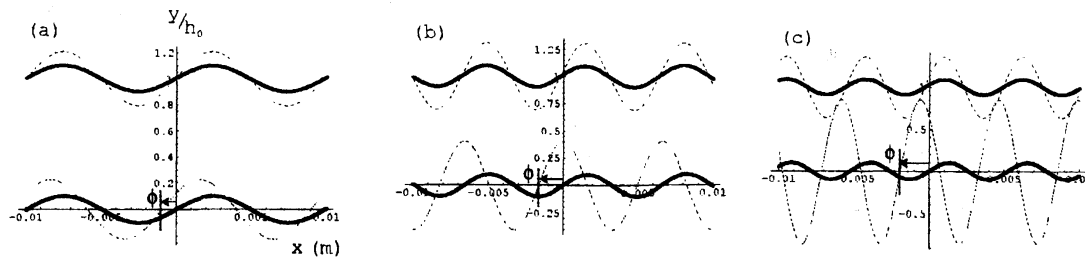


図 4: 固液界面の揺らぎ  $\Im[\zeta/h_0]$  (下の太い実線), 気液界面の揺らぎ  $1 + \Im[\xi/h_0]$  (上の太い実線),  $\Im[\zeta/h_0]$  での熱流  $q_l - q_s$  (下の点線),  $1 + \Im[\xi/h_0]$  での熱流  $q_a$  (上の点線). (a)  $k = 634/\text{m}$ , (b)  $k = 953/\text{m}$ , (c)  $k = 1200/\text{m}$ .  $\phi$  は  $\Im[\zeta/h_0]$  に対する  $q_l - q_s$  の位相のずれを表す.

界面上のどこで熱流が一番大きいかは, 与えられた境界条件のもとで温度揺らぎ場の解を求めた後でないとわからないことを示している.

## 4 結論

つららの表面や傾斜面を流れ落ちる過冷却液体からの結晶成長過程で起こる凹凸パターンの波長は, 拡散による Mullins-Sekerka 不安定性と Gibbs-Thomson 効果による安定性の拮抗で決まる波長に比べると数桁大きい長さスケールで観察される. 著者は, その波長を定量的に求めるとともに, 固液界面の揺らぎとそこでの熱流分布の位相差が, 重力と表面張力による復元力の大きさに依存して変化することを示し, 固液界面の不安定性, 安定性はこの位相差の大きさに関係していることを示した. また, 固液界面の揺らぎに対する熱流分布の位相のずれの向きが固液界面の揺らぎの移動の方向に関係していることを示した.

## 参考文献

- [1] A. Betat, V. Frette and I. Rehberg, Phys. Rev. Lett **83**, 88 (1999).
- [2] N. Maeno, L. Makkonen, K. Nishimura, K. Kosugi and T. Takahashi, J. Glaciol. **40**, 319 (1994).
- [3] S. Matsuda, Master's thesis, Institute of Low Temperature Science, Hokkaido University, 1997 (in Japanese).
- [4] N. Ogawa and Y. Furukawa, Phys. Rev. E **66**, 041202 (2002).
- [5] K. Ueno, Phys. Rev. E **68**, 021603 (2003).
- [6] K. Ueno, submitted to Phys. Rev. E.
- [7] L. Landau and E. Lifschitz, *Fluid Mechanics*, (Pergamon Press, London, 1959).
- [8] B. Caroli, C. Caroli and B. Roulet, in *Solids Far From Equilibrium*, edited by C. Godrèche, (Cambridge, Cambridge 1992).